1997年　東大数学　文系第3問

$P(x, y, z)$ とおくと。

{ x, y, z, r の4文字 3本の式 の 連立方程式を解く

$|\vec{PA}|^2 = (x-1)^2+y^2+z^2$

$|\vec{PB}|^2 = x^2+(y-1)^2+z^2$

$|\vec{PC}|^2 = x^2+y^2+(z-1)^2$

$|\vec{PO}|^2 = x^2+y^2+z^2$ である。

$|\vec{PA}| = |\vec{PB}| = r|\vec{PO}|$ より $|\vec{PA}|^2=|\vec{PB}|^2=r^2|\vec{PO}|^2$

$\Leftrightarrow$ $|\vec{PA}|^2=|\vec{PB}|^2$ …① かつ $|\vec{PB}|^2=r^2|\vec{PO}|^2$ …②

$|\vec{PC}| = |\vec{PO}|$ より $|\vec{PC}|^2=|\vec{PO}|^2$ …③ として

それぞれ代入すると

① $\Leftrightarrow$ $(x-1)^2+y^2+z^2 = x^2+(y-1)^2+z^2$

$\Leftrightarrow$ $-2x+1 = -2y+1$　　$x=y$ …①'

② $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2-2y+1+z^2 = r^2(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow$ $(r^2-1)x^2+(r^2-1)y^2+(r^2-1)z^2+2y-1=0$ …②'

③ $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2+(z-1)^2 = x^2+y^2+z^2$

$-2z+1=0$　　$z=\frac{1}{2}$ …③'

①'と③'を②'に代入して

$(r^2-1)x^2+(r^2-1)x^2+(r^2-1)\cdot\frac{1}{4}+2x-1=0$

$2(r^2-1)x^2+2x+\frac{1}{4}r^2-\frac{5}{4}=0$

$8(r^2-1)x^2+8x+r^2-5=0$ …④

3本の連立方程式を使ってシンプルにした結果

求める条件は④を満たす x が2つ存在する r の条件である。

x^2 の係数が文字式なので場合わけ。

(i) $r^2=1 \Leftrightarrow r=1$ ($\because r>0$) のとき

④ $\Leftrightarrow$ $8x-4=0$ $\Leftrightarrow$ $x=\frac{1}{2}$　$(x, y, z)=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

x の解が1つしか存在しないので、不適。

安心して $r^2 \neq 1$ としてよい。

(ii) $r^2\neq 1 \Leftrightarrow 0<r<1$ または $1<r$ のとき

④の判別式 D に対して、$D>0$ となればよい。

$$D/4 = (-4)^2-8(r^2-1)(r^2-5)>0$$

$$16-8(r^4-6r^2+5)>0$$

$$-8r^4+48r^2-24>0$$

$$r^4-6r^2+3<0$$

$3-\sqrt{6} < r^2 < 3+\sqrt{6}$　$r>0$ で解くと

$\sqrt{3-\sqrt{6}} < r < \sqrt{3+\sqrt{6}}$

$0<r<1$ または $1<r$ と連立して

$\sqrt{3-\sqrt{6}} < r < 1$ または $1<r<\sqrt{3+\sqrt{6}}$ //

このとき、④の解は、

$$x = \frac{-4\pm\sqrt{(-4)^2-8(r^2-1)(r^2-5)}}{8(r^2-1)}$$

$$= \frac{-4\pm\sqrt{-8r^4+48r^2-24}}{8(r^2-1)}$$

$$= \frac{-2\pm\sqrt{-2r^4+12r^2-6}}{4(r^2-1)}$$

$x=y$, $z=\frac{1}{2}$ より、求める P の座標は

$$\left(\frac{-2\pm\sqrt{-2r^4+12r^2-6}}{4(r^2-1)},\ \frac{-2\pm\sqrt{-2r^4+12r^2-6}}{4(r^2-1)},\ \frac{1}{2}\right)$$ //

おまけ

$0<x$, $0<y$ のとき　$x=y \Leftrightarrow x^2=y^2$ である。(十分性OK)

今回は、ベクトルの大きさで、例えば、$|\vec{PA}|=\sqrt{\ } >0$ なので、十分性は担保される。また、

$|\vec{PA}| = \sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$ などで、x, y, z に負の値を代入しても

よいことも安心。